Vicerrectoría Académica VRAC

Informe: "Evidencias para la Gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en el I ciclo formativo"

- Área de Matemática -

Vicerrectoría Académica VRAC

Dirección General de Docencia

Departamento de Seguimiento a la Progresión del Estudiante

Unidad de Mejoramiento Docente

DIRECCIÓN GENERAL DE DOCENCIA
Departamento de Seguimiento a la Progresión de los Estudiantes

UMD
Unidad de Mejoramiento Docente
VICERRECTORÍA ACADÉMICA

Vicerrectoría Académica VRAC

Análisis de Errores de los y las Estudiantes en Prueba Diagnóstico de Matemáticas

Cohorte 2020

Vicerrectora Académica: Diana Veneros Ruiz-Tagle

Subdirector de Docencia: Luis Sandoval Vásquez

Coordinador DESPE: Mario Luna Correa

Encargada UMD: Lorena González Otárola

Contacto DESPE: despe@utem.cl

Contacto UMD: umd@utem.cl

San Ignacio #160, Santiago

marzo del 2021

Dirección General de Docencia
Departamento de Seguimiento a la Progresión de los Estudiantes

UMD
Unidad de Mejoramiento Docente
Vicerrectoría Académica

Contenido

Presentación

Actualmente las instituciones que aspiran a mejorar la calidad de sus prestaciones tienen el desafío de aprender de sí mismas, es decir, lograr evaluar sus propios procesos y estrategias a la luz del impacto o incidencia que tienen en el logro de sus metas. Para las universidades, esta capacidad de evaluación supone, en primera instancia, analizar las características del proceso formativo y calidad de sus egresados a la luz del proyecto educativo declarado y las demandas del contexto local, nacional e internacional.

Para alcanzar lo anterior, las instituciones están llamadas a generar datos y evidencias que permitan alimentar tales procesos evaluativos y tomar decisiones informadas y coherentes con los resultados alcanzados hasta un momento particular de la gestión. En este contexto, la Universidad Tecnológica Metropolitana (UTEM) tiene una amplia tradición de gestión en base a los datos y otras evidencias, lo cual ha sido valorado por la comunidad universitaria como en los procesos de acreditación institucional.

A partir de 2020, la Vicerrectoría Académica de la UTEM, a través de la Dirección General de Docencia, inicia procesos de caracterización y nivelación académica de las nuevas cohortes con propósitos de alcanzar evidencias válidas para el monitoreo y seguimiento de la progresión académica de los y las estudiantes. En esta reciente experiencia se logró recopliar más de 150.000 datos de carácter académico que revelan las competencias de ingreso de los y las estudiantes en las áreas de Lenguaje, Matemáticas, Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) y Autorregulación.

A propósito de la amplia información con la que se contaba sobre las características de los y las nuevas estudiantes, desde la Vicerrectoría Académica, se estimó que esta información debería constituirse en evidencias prácticas para que los y las docentes las utilicen en las asignaturas del I ciclo formativo, es decir, fortalecer el proceso formativo en las aulas a partir de las evidencias.

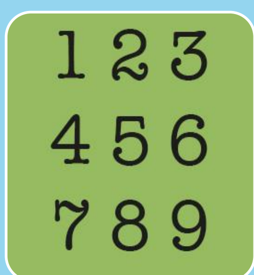
En esta línea, durante 2020 fue mandatado a la Unidad de Mejoramiento Docente (UMD) y al Departamento de Seguimiento a la Progresión de los Estudiantes (DESPE), la producción de evidencias para la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje, a partir de la caracterización de los y las estudiantes 2020. De allí que ambas unidades realizaron un análisis de los errores frecuentes en las evaluaciones de Lenguaje y Matemática, y posteriormente establecieran recomendaciones pedagógicas respecto de cómo abordar tales errores y utilizarlos como medios para alcanzar aprendizajes significativos.

Con todo, la Vicerrectoría Académica deja a disposición de las y los docentes que realizan clases en el I ciclo formativo, esta guía de análisis de errores frecuentes, con los propósitos de nutrir, desde la caracterización académica 2020, el proceso de enseñanza-aprendizaje y compartirlo con los y las estudiantes como un pertinente material de consultas o estudio.

1. *Análisis de errores en el área de Matemática*

En este apartado son presentados los resultados del análisis de errores sobre las respuestas de los y las estudiantes en la prueba de caracterización sobre el perfil mínimo requerido (PMR) para el área de Matemática. En primer lugar, se detalla la metodología utilizada y las fuentes consultadas para la realización del análisis. Posteriormente, son planteadas las descripciones de los errores, organizados según ejes curriculares (números y álgebra) y resultados de aprendizaje con sus respectivas competencias, identificando y describiendo eventuales causas de los errores, y exponiendo ejemplos a partir de los ítems de la prueba.

Figura N°1: Área de Matemática del Perfil Mínimo Requerido.



Eje: **Números**

- ***Compentencia***: Resuelve problemas, aplicando las operaciones básicas y la regla de los signos en los números reales.
  - ***Resultados de aprendizaje***:
    - Realiza operaciones con números racionales aplicando la regla de los signos correspondientes.
    - Transfiere propiedades de la multiplicación y división de potencias a los ámbitos numéricos correspondientes.

Eje: **Álgebra**

- ***Competencia*** : Utiliza procedimientos algebraicos con expresiones en las que intervienen raíces y potencias.
  - ***Resultados de aprendizaje***:
    - Escribe las propiedades de raíces y potencias de acuerdo con fórmulas estandarizadas.
    - Aplica propiedades de raíces y potencias en procedimientos algebraicos.

Competencia: Transforma expresiones algebraicas utilizando los productos notables, aplicando con ellos factorización, simplificación y racionalización.

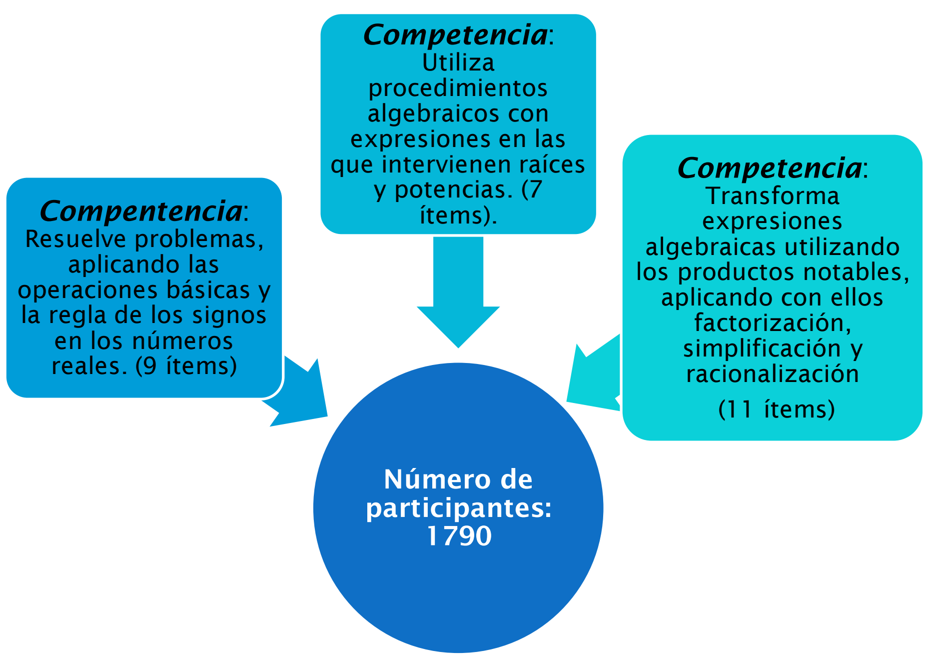
- ***Resultados de aprendizaje***:
  - Utiliza los productos notables en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas.
  - Realiza operaciones con términos semejantes.
  - Desarrolla los productos notables completando el cuadrado de binomio.

1.1 Metodologías y fuentes utilizadas en el análisis del área de Matemática.

Con el propósito de evidenciar las causas por las cuales los y las estudiantes cometieron errores en las respuestas para el área de Matemática, se consideró el siguiente proceso de análisis por eje y resultados de aprendizaje:

- ✓ Antes de establecer los análisis descriptivos, fue revisada sistémicamente la prueba con el propósito de familiarizarse con el constructo evaluado. De este modo, se alcanzó una noción cualitativa del instrumento (tipos de pregunta, redacción de los enunciados y clavijeros, selección de los textos o estímulos, entre otros).
- ✓ Posteriormente, fue analizada la dificultad de cada ítem y el comportamiento estadístico de estos, a partir del índice de dificultad y el índice de discriminación. En continuidad, fue realizado un análisis cuantitativo considerando la comparación entre la frecuencia de respuestas correctas y las otras las claves de las preguntas. Luego, fue determinado el rango porcentual de preferencia por cada alternativa de los ítems y su comportamiento estadístico, considerando los índices de dificultad y discriminación.
- ✓ Finalmente, fueron seleccionadas y recuperadas las preguntas y alternativas que evidenciaran los errores, para proceder con los análisis por ejes y resultados de aprendizajes.

Figura N°2: Distribución de ítems por competencias del área.



En cuanto a las fuentes consultas para realizar este análisis, fueron consideradas:

- "Prueba Diagnóstico de Matemática" aplicada a estudiantes de ingreso 2020.
- Tabla de especificaciones y distribución porcentual de respuestas de la "Prueba Diagnóstico de Matemática".
- "Reporte de Resultados Diagnósticos — Cohorte 2020. Resultados Institucionales", elaborado por DESPE.
- Perfil Mínimo Requerido Matemática: especificación de ejes, competencias y resultados de aprendizaje.

1.2 Análisis de errores por eje: Números.

A continuación, son presentados los resultados del análisis de errores más representativos, evidenciados para el eje de números, desagregándolos por competencias que componen este eje.

Competencia: *Resuelve problemas, aplicando las operaciones básicas y las reglas de los signos en los números reales.*

Respecto de la competencia, la evidencia analizada demuestra la presencia de dificultades en la "jerarquía de operaciones", pues no se comprende que existen operaciones que tienen prioridad sobre otras para resolver un ejercicio combinado siguiendo el orden: paréntesis, potencias y raíces, multiplicación y división, adición y sustracción. Asimismo, fueron evidenciadas dificultades para operar correctamente con números racionales, lo que se transforma en un obstáculo para resolver problemas que involucren fracciones, tanto en este eje como en álgebra.

Lo anterior se ilustra en el ítem 7, donde se evidencia la aplicación correcta de propiedades de las potencias, pero no se logró obtener la clave por no consolidar los conocimientos previos, tales como la operatoria de números racionales y la propiedad distributiva, junto a la prevalencia de la multiplicación y la división por sobre la adición y la sustracción.0.

Ejemplo:

7. El resultado del problema $7 \cdot \left(9 - \frac{2^3 \cdot 5^3}{10^4}\right)$ es:

$B)\ \frac{623}{10}$

C) $-\frac{63}{10}$

$D)\ \frac{629}{10}$

En el ejemplo, alrededor del 37% de los y las estudiantes no lograron identificar la alternativa correcta. Se evidencia que aplicaron las propiedades de las potencias, obteniendo que $\frac{2^3 \cdot 5^3}{10^4} = \frac{(2 \cdot 5)^3}{10^4} = \frac{10^3}{10^4} = \frac{1}{10}$. Por lo tanto, luego de aplicar estas propiedades, el ejercicio se reduce a calcular $7 \cdot \left(9 - \frac{1}{10}\right)$. En este punto, pudieron haber aplicado la propiedad distributiva, donde debe establecer que $7 \cdot \left(9 - \frac{1}{10}\right) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot \frac{1}{10}$. Sin embargo, un 12% de los y las estudiantes, seleccionó el distractor D, el cual surge de aplicar de manera errónea, la propiedad mencionada.

En concreto:
$7 \cdot \left(9 - \frac{1}{10}\right) \neq 7 \cdot 9 - \frac{1}{10} = \frac{629}{10}$, vale decir, solo ha multiplicado 7 por 9 y luego realiza la diferencia con $\frac{1}{10}$.
Otro camino para calcular $7 \cdot \left(9 - \frac{1}{10}\right)$, es resolver primero el paréntesis, lo que requiere dominio de la operatoria de racionales. En este caso, al realizar la diferencia entre 9 y $\frac{1}{10}$ se obtiene $\frac{89}{10}$. Posteriormente, se multiplica este valor por 7. Sin embargo, un 14,8 % de los y las estudiantes realizó la siguiente operación seleccionando erróneamente la alternativa C: $7 \cdot \left(9 - \frac{1}{10}\right) \neq 7 \cdot 9 \cdot -\frac{1}{10} = -\frac{63}{10}$., lo que evidencia la incorrecta operación en números racionales.

1.2.1 Análisis de errores por resultado de aprendizaje asociados a las competencias del eje Números.

A continuación, son presentados el análisis de errores desagregados por resultado de aprendizaje con sus respectivas competencias.

De acuerdo con los resultados, se evidencia que los errores son producto principalmente de dificultades asociadas a que la propiedad distributiva no se ha logrado consolidar, además, no existe una operación correcta con los números racionales, lo que se transforma en un obstáculo para resolver problemas que involucren fracciones, tanto en este eje como en álgebra.

Competencia: *Resuelve problemas, aplicando las operaciones básicas y las reglas de los signos en los números reales.*

R.A.1: *Realiza operaciones con números racionales aplicando la regla de los signos correspondiente.*

Los ítems propuestos para este resultado de aprendizaje buscaban verificar el dominio del concepto de inverso multiplicativo, es decir, que el producto entre un número cualquiera y su inverso multiplicativo es siempre igual al neutro multiplicativo, que en este caso es 1, sin necesidad de realizar ningún procedimiento aritmético. Lo anterior se evidencia en el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

2. El resultado de multiplicar el número $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ por su inverso multiplicativo es:

A) 1

C) $\frac{1}{2}$

D) 2

En el ítem 2, el 41,3% de los y las estudiantes acierta la alternativa correcta A. En contrapartida las respuestas incorrectas se inclinan mayoritariamente por las alternativas C con un 17.3% y D con un 24.39%, en ambos casos se procede erróneamente de la siguiente manera:

- Alternativa C: fue multiplicado el inverso multiplicativo de la expresión y luego aplicadas propiedades de operación de potencias de igual base, obteniendo una potencia de exponente cero, indicando como resultado el valor de la base, confundiendo una potencia de exponente cero con una potencia de exponente uno.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = \frac{1}{2}$$

- Alternativa D: Al ser el exponente negativo fue invertida la base de la potencia y se deja el exponente positivo, luego aquel resultado lo multiplican por su inverso multiplicativo y cometen el mismo error que en la alternativa C.

$$2^2 \cdot 2^{-2} = 2^0 = 2$$

***R.A.2:** Transfiere propiedades de la multiplicación y división de potencias a los ámbitos numéricos correspondientes.*

En los ítems propuestos para este aprendizaje el propósito era aplicar propiedades de las potencias, como la potencia de exponente 0, con exponente negativo, división de potencias igual base, producto de potencia de igual exponente; dando cuenta de la aplicación de propiedades para el cálculo de potencias numéricas. A continuación, un ejemplo de aplicación de propiedades y operación con números racionales:

Ejemplo:

20. Resuelva $4^{-2} + 2^{-3} - 2^{-4} =$:

A) $\frac{1}{8}$

B) $\frac{1}{4}$

$D) - 8$

El ítem requiere aplicar el concepto de potencia en el cálculo aritmético y es respondido correctamente por el 57,2% de los y las estudiantes. En contrapartida, el 16,3% selecciona erróneamente la alternativa B y equivocan porque no advierten el signo de la última potencia y la suman en vez de restarla. Luego un 13,4% responden de manera incorrecta la alternativa D, cuando obtienen como resultado - 8, debido a que no han asimilado el concepto de potencia de base entera y exponente negativo, pues en vez de comprenderlo como el inverso multiplicativo lo comprenden como inverso aditivo.

1.2.2 Recomendaciones para el eje Números.

Para la universidad es fundamental identificar las dificultades en el área de la matemática, a fin de brindar una respuesta educativa que apoye académicamente en aquellos aprendizajes que los y las estudiantes no adquirieron en su etapa escolar. Por ello, realizado el análisis por eje y resultado de aprendizaje por ítem, se realizan las siguientes recomendaciones al eje de números:

- ✓ Es necesario reforzar la jerarquía de operaciones a través de ejercicios combinados que involucren las 4 operaciones (adición, sustracción, multiplicación y división), de modo que, sean aplicadas las reglas relativas a paréntesis, considerando la prevalencia de la multiplicación y la división por sobre la adición y la sustracción. Esto busca evidenciar la aplicación de estas reglas, más allá de reconocer la prioridad de las operaciones.

- ✓ Trabajar con problemas referidos a los conjuntos de los números enteros, racionales y reales en diversos contextos.
- ✓ Realizar ejercicios que involucren las 4 operaciones (adición, sustracción, multiplicación y división) en el conjunto de los números racionales. El manejo de fracciones es parte de los conocimientos previos en el eje de álgebra, donde se vincula la resolución de ecuaciones a la reducción de términos semejantes con coeficientes racionales, entre otros.
- ✓ Reforzar propiedades de potencias y raíces, demostrando algunas de estas propiedades junto a los y las estudiantes, de modo que el aprendizaje no sea reducido a la memorización. Por otro lado, para el caso de las potencias podría aplicarse propiedades en diversas situaciones como en el crecimiento bacteriano, cadenas de favores, videos virales, fractales, etc., de modo que el contenido sea situado.

- ✓ Respecto a la promoción y gestión de esta competencia en el contexto del proceso de enseñanza-aprendizaje, se sugiere la promoción del método de Polya (citado por Alfaro, 2006)

1. Comprender el problema:	
¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Es redundante? ¿Es contradictoria?	- Establecer cuál es la incógnita del problema, los datos y las condiciones con las que se cuentan.
2. Definir un plan:	
¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿Conoce un problema relacionado? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente	- Concebir el plan, relacionándolo con otras situaciones o resultados similares que puedan ser útiles en la resolución del problema - Realizar interpretación grupal del problema

nuevamente?	planteado, para que el estudiante vaya familiarizándose con la estrategia y posteriormente logre interpretar y construir diversas formas de resolución de problemas.
3. Ejecutar el plan:	
¿Puede ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede demostrarlo?	- Revisar todos los detalles e identificar la diferencia entre percibir que un paso es correcto y demostrar que lo es. - Interpretar adecuadamente la incógnita; utilizar la intuición, la experimentación, el razonamiento lógico - Ejecutar las estrategias de solución y compartirlas con la clase.
4. Examinar a solución:	
¿Puede verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?	- Revisar lo que se realizó, verificar el resultado y el razonamiento seguido, pues esto permitirá no solo resolver un problema, sino que puede generar habilidades para resolver posteriores situaciones, o sea, se podría utilizar el método de solución como medio para hacerle frente a otro tipo de problemas. - Examinar y compartir la solución permite verificar que pueden existir otras formas de obtener los resultados, lo que recalcaría que existen varias posibilidades de resolver un mismo problema.

1.3 Análisis de errores para el eje Álgebra.

A continuación, son expuestos los análisis sobre los errores para el eje de álgebra, para lo cual fueron seleccionados los ítems más representativos.

Competencia: *Utiliza procedimientos algebraicos con expresiones en las que intervienen raíces y potencias.*

En el caso del eje de álgebra, cuando fue analizado los ítems vinculados a sus competencias, se evidenció que existen dificultades para operar correctamente expresiones algebraicas. En cuanto a la reducción de términos semejantes. A continuación, es expuesto un ejemplo donde se materializa la anterior dificultad.

Ejemplo:

21. Si p>1, entonces $\left(\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{p}}\right)$ **es siempre igual a:**

D) $\frac{p+1}{p-1}$

A) -1
B) 1

En el ejemplo, el 36.3% de los y las estudiantes responde correctamente el ítem. Para resolverlo era necesario sumar ambas expresiones fraccionarias, a partir del mínimo común múltiplo, para luego efectuar un producto de raíces. En concreto era necesario establecer $(1+\sqrt{\mathrm{p}})(1-\sqrt{\mathrm{p}}) = 1 - \mathrm{p}$, donde deberán utilizar que $\sqrt{\mathrm{p}} \cdot \sqrt{\mathrm{p}} = \left(\sqrt{\mathrm{p}}\right)^2 = \mathrm{p}$. Si se realiza de manera correcta estos procedimientos se obtiene $\frac{-\mathrm{p}-1}{1-\mathrm{p}}$, donde se debe amplificar por (– 1) tanto el numerador como denominador para obtener $\frac{\mathrm{p}+1}{\mathrm{p}-1}$.

Es posible errar en cualquiera de estos procedimientos más intermedios. Por ejemplo, si se obtiene que $(\sqrt{\mathrm{p}}+1)\,(1-\sqrt{\mathrm{p}})$ es igual a p + 1, se equivoca el 9.2% obteniendo como respuesta la alternativa A) – 1, mientras que, si se realiza de manera correcta este producto, pero al sumar las expresiones se obtiene en el numerador – p + 1, el 17.9% llegaba a una respuesta errónea seleccionando la alternativa B) 1. Luego, se requiere también el dominio de la operatoria de expresiones fraccionarias, las cuales, en este caso añaden la dificultad de presentar radicales.

Competencia: *Transforma expresiones algebraicas utilizando los productos notables, aplicando con ellos factorización, simplificación y racionalización.*

En los ítems vinculados a esta competencia, los y las estudiantes muestran dominio de los productos notables como el cuadrado de binomio y la suma por su diferencia, pero al tener que aplicar más de un contenido, esto se transforma en un obstáculo. Lo anterior es materializado en el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

27. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el producto entre un número aumentado en 5 unidades y ese mismo número disminuido en 5 unidades?

A) $x^2 - 25$

C) (5-x)(x+5)
D) (x+5)-(x-5)

El ítem 27, es logrado por el 25,1% de los y las estudiantes, encontrándose la mayoría de los errores en la alternativa C, donde el 33.7% se equivocan, pues si bien reconocieron las expresiones (x – 5) y (x + 5), al efectuar el producto, no encontraron entre las opciones a (x – 5)(x + 5), porque concluyeron que (x – 5)(x + 5) era igual a (5 – x)(x + 5), lo cual no es correcto.

Por otro lado, el 26,9% seleccionó erróneamente la alternativa D, en este caso la causa del error se genera al escribir la diferencia de las expresiones (x + 5) y (x – 5), en vez del producto. Es decir, en ambas opciones los y las estudiantes reconocen las expresiones (x – 5) y (x + 5), pero en el primer caso marcaron una opción que se asemeja, mientras que en el segundo interpretaron de manera incorrecta lo solicitado. (Esto último también puede estar motivado por no encontrar entre las opciones a (x – 5) (x + 5), ya que figuraba su desarrollo).

1.3.1 Análisis de errores por resultado de aprendizaje asociados a las competencias del eje Álgebra.

A continuación, se presentan por resultado de aprendizaje y competencia, los ítems más representativos de errores.

Competencia: *Utiliza procedimientos algebraicos con expresiones en las que intervienen raíces y potencias.*

R.A.4: *Aplica propiedades de raíces y potencias en procedimientos algebraicos.*

En el ejemplo del ítem 23, se requiere trabajar con potencias de exponente negativo, luego sumar potencias obteniendo un mínimo común múltiplo, factorizar y finalmente realizar una simplificación de expresiones algebraicas. En este caso, las causas de los errores se asocian a la falta de apropiación sobre las propiedades de raíces y potencias, no logrando la aplicación las propiedades.

Ejemplo:

23. Si m es un número real positivo, entonces $\left(\frac{m^{-1}+m^{-2}+m^{-3}}{m+m^{2}+m^{3}}\right)$ es siempre igual a:

✓ **C)** $\frac{1}{m^4}$

✗ D) $\frac{1}{m^2}$

El ítem es respondido correctamente solo por el 36% de los y las estudiantes. Es posible que se apliquen propiedades de las potencias, las cuales son utilizadas principalmente en el producto de potencias y no en la suma de estas. Dicha confusión es la que conduce al 24,6% a seleccionar erróneamente la clave D.

Competencia: *Utiliza procedimientos algebraicos con expresiones en las que intervienen raíces y potencias.*

R.A.7: *Utiliza los productos notables en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas.*

Ejemplo:

24. Si $\frac{(p-b)}{5} = \frac{3(p+b)}{20}$**, entonces p es siempre igual a:**

A) $7b$

C) $2b$

En el ejemplo, solo el 42% contestó correctamente. Observamos que se trata de una ecuación en la variable p, la cual se debe despejar en términos de b. Para resolver este ítem, era necesario dominar el teorema fundamental de las proporciones, donde al multiplicar los extremos con los medios, resulta la ecuación 20(p – b) = 15(p + b). El problema finaliza al distribuir y luego agrupar en un lado las p, mientras que en el otro las b. Un 26% marcó la C, es decir, p = 2b.

Nótese que, para llegar a este último distractor era necesario multiplicar por 5 tanto el lado izquierdo como el derecho, posteriormente, dado que ahora en el denominador de la fracción de lado derecho quedó un 4, se debió volver a multiplicar la igualdad por 4. No obstante, al momento de desarrollar 4(p – b) solo se multiplicó el primer término y no el segundo, obteniendo (4p – b), en vez de (4p – 4b).

Es apreciable que el 26,6% de los y las estudiantes seleccionó la alternativa C, esto debido a que simplificaron de manera incorrecta los números 5 y 20, luego aplicaron erróneamente la propiedad distributiva, multiplicando el factor solo por el primer término de cada paréntesis.

Para este resultado de aprendizaje dentro del mismo contenido surgen distintos niveles de logro, lo que guarda relación con el manejo del álgebra adquirido. En algunos ítems fue evidenciada dominio de los productos notables como el cuadrado de binomio y la suma por su diferencia, pero en otros, que exigían aplicar más de un contenido, esto se transforma en un obstáculo.

A continuación, se presenta un ejemplo que materializa el análisis previo:

Ejemplo:

34. La expresión $(1-n)^2-(1+n)(1-n)$ es equivalente a:

C) $2n^2-2n$

E) -2n
B) 0

Cabe resaltar que este contenido de álgebra es parte del currículum de primero medio. Si bien se enseña a calcular el cuadrado de binomio como una fórmula simplificada del producto de binomio por binomio, lo cierto es que todas estas identidades se obtienen a partir del producto de expresiones algebraicas y de la reducción de términos semejantes.

El ítem presenta una distribución homogénea de respuestas incorrectas, por ende el error pudo darse en distintas etapas del proceso, evidenciado dificultades para comprender de manera correcta los desarrollos de los productos notables presentados, como la distribución de los signos negativos presentes.

En este ejemplo solo el 35,3% de los y las estudiantes desarrolló correctamente el cuadrado de binomio y luego la suma por su diferencia, para restar ambas expresiones. En efecto,

$$(1-n)^2-(1+n)(1-n)=1-2n+n^2-(1-n^2)=1-2n+n^2-1+n^2=2n^2-2n$$

Por lo tanto, además del manejo de los productos notables, era necesario realizar la diferencia. El 17,6% aplicó el signo negativo solo al primer término del paréntesis y no al segundo, obteniendo como resultado incorrecto la alternativa E) -2n. En contrapartida, el 18,9% elige erróneamente la clave B interpretando $(1+n)(1-n)$ como $(1-n)^2$, por lo que la diferencia de las expresiones inicial sería 0.

La principal falencia sobre este resultado de aprendizaje guarda relación con operar el signo negativo que antecede a un paréntesis. En concreto, se cumple que – (a + b) = – a – b, es decir, este signo negativo equivale a multiplicar por (– 1) cada uno de los términos que se encuentran en el interior del paréntesis, pero solo se ha cambiado el signo del primer término y no del segundo, estableciendo que – (a + b) es igual a – a + b. Por lo tanto, es fundamental reforzar el aprendizaje de este procedimiento, pues afecta el logro de todos procedimientos asociados a este resultado de aprendizaje.

***R.A.8:** Realiza operaciones con términos semejantes*

Ejemplo:

30. Al reducir (a-b)-(a+b) se obtiene:

D) $-2b$

A) 2a
E) 2ab

En el ejemplo, si bien el 50,1% de los y las estudiantes respondió correctamente, en su conjunto el 49,9% no realizó correctamente la distribución del signo negativo frente a un paréntesis, lo que se explica por eliminación de paréntesis y por la adición y sustracción de términos semejantes.

Con respecto a lo primero, sabemos que si un signo negativo se presenta delante de un paréntesis, la expresión – (a + b) es igual a – a – b, lo cual se interpretó de diversas formas, por ejemplo: – (a + b) = – a + b o bien – (a + b) = a + b, u otras interpretaciones equivocas asociadas a signos y paréntesis, incluso si este posee un signo positivo delante. Por ejemplo, si se considera que – (a + b) = a + b, entonces resulta erróneamente la alternativa A, la cual obtuvo un 8% de las preferencias.

Por otro lado, el 22,8% seleccionó en forma equivocada la alternativa E, por lo que en este caso al reducirlo, no obtuvieron expresiones de la forma ax + by, que era lo esperado, sino que obtuvieron un producto, en concreto 2ab, lo que evidencia falta de la reducción, y aun realizándola no fue ejecutada respetando las reglas. De hecho, el signo negativo delante del paréntesis – (a + b), da cuenta de una multiplicación por (– 1), por lo que al aplicar la propiedad distributiva se obtiene – a – b.

Para resolver los ítems propuestos en este resultado de aprendizaje, se requería reconocer el desarrollo de un cuadrado de binomio, es decir, el primer término al cuadrado más dos veces el primer término por el segundo, más el segundo término al cuadrado. En general no siempre se realizó un análisis exhaustivo del enunciado, por lo tanto, se tendió a reproducir la fórmula que define el cuadrado de binomio. Analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo

35. Para que la expresión $9a^2 + 12ab + \cdots$ sea un cuadrado de binomio falta:

A) $4b^2$

D) b^2

En este ítem un 35,3% de los y las estudiantes respondieron erróneamente. Para resolver un cuadrado de binomio, recordemos que al expandir $(x + y)^2$, se obtiene $x^2 + 2xy + y^2$. Por lo tanto, al reconocer esta estructura, notamos que el primer término de la expresión dada del ítem 35 corresponde al cuadrado de 3a, mientras que el segundo término es $2 \cdot (3a) \cdot (2b)$.

En efecto,

$9a^2 + 12ab + k^2 = (3a)^2 + 2 \cdot (3a) \cdot (2b) + k^2$, de donde se deduce que $k = 2b$. De este modo,

$$9a^2 + 12ab + 4b^2 = (3a + 2b)^2$$

Por lo tanto, para que la expresión sea un cuadrado de binomio, el término faltante debe ser $4b^2$. Un 13,4% selecciona erróneamente con mayor preferencia la clave D, donde se interpreta que el tercer término es b^2, al no realizar el estudio del término 12ab.

1.3.2 Recomendaciones para el eje Álgebra.

Cuando los y las estudiantes transitan desde la aritmética al lenguaje simbólico del álgebra, logran el desarrollo de las habilidades de razonamiento abstracto necesarias para enfrentar no solo con éxito los cursos vinculados a la nivelación en matemáticas, sino que también- al establecer relaciones, explicar y realizar generalizaciones- obtienen una herramienta crucial para la resolución de problemas de todo orden. Por lo anterior, a fin de aportar a la gestión pedagógica de los aprendizajes matemáticos en álgebra, se sugieren las siguientes consideraciones:

- ✓ Deducir junto a los y las estudiantes las propiedades de las potencias y raíces, estableciendo relaciones entre potencias de exponente racional y las raíces. En la misma línea, aunque se dé por supuesto la existencia de la raíz es relevante analizar la existencia de la raíz enésima en el conjunto de los números reales.

- ✓ En el caso de las ecuaciones de primer grado, las cuales se describen ligadas a las expresiones algebraicas, se deben trabajar como ecuaciones literales de primer grado, es decir, ecuaciones cuyos coeficientes no son numéricos, sin embargo, esta competencia presupone que los y las estudiantes resuelven ecuaciones de primer grado. Por lo tanto, para lograrlo se sugiere un trabajo gradual, de modo que en una primera instancia trabajen ecuaciones lineales con coeficientes enteros, por ejemplo, $2x + 5 = 11$, para luego transitar a las ecuaciones con coeficientes racionales y finalmente a las ecuaciones literales.

- ✓ Alineado al punto anterior, el contenido de resolución de ecuaciones se sugiere sea enseñado con ecuaciones como modelos que surgen de diversas situaciones, de modo que, nuevamente los y las estudiantes evidencie el contenido situado, lo que facilita su comprensión.

- ✓ Con respecto a la reducción de términos semejantes, resulta conveniente un trabajo vinculado al uso de la eliminación de paréntesis. Se observó que en los ítems 29, 30 y 31, un alto porcentaje no respondió correctamente (alrededor de un 50%), puesto que la eliminación del signo negativo no se realizó de la siguiente manera $-(a + b) = -a - b$, sino que se cambió el signo del primer término y no el signo de los términos sucesivos. Por otro lado, es usual que en ejercicios de reducción de términos semejantes se utilicen términos con coeficientes racionales, por lo que la operatoria en Q es clave para resolver este tipo de problemas.

- ✓ Finalmente, con respecto a los productos notables, se recomienda trabajar la adición y la multiplicación de expresiones algebraicas, para luego transitar al desarrollo del cuadrado de binomio y la suma por su diferencia, desde el punto de vista algebraico y también con su interpretación geométrica.

- ✓ Promover la observación analítica y crítica de generalidades y su verbalización durante el tiempo que sea necesario para luego promover la simbolización de las observaciones.

- ✓ Diseñar actividades de aprendizaje que permita a los estudiantes adquirir el concepto de variable con sus distintos usos, e ir apropiándose de los nuevos significados de los símbolos matemáticos ya utilizados en aritmética y geometría, como el signo igual, los signos de mayor y menor que, los signos de las operaciones, las letras y las fórmulas.

- ✓ Trabajar la resolución de problemas, como una de las formas de desarrollar la simbolización,

Consideraciones Finales.

Los errores en el aprendizaje son ocurrencias normales y estimables en el proceso de aprendizaje (Fisher y Lipson, 1986). El error es una constante en todo proceso de enseñanza-aprendizaje y debe ser entendido como un desajuste conceptual o de ejecución (desajuste entre lo esperado y lo obtenido). Los errores en la práctica educativa simplemente ponen de manifiesto una ocurrencia inadecuada o la existencia de fallos en el proceso de aprendizaje- por lo que es preciso esclarecerlo, y aprender a utilizarlo didácticamente.

El error, desde una didáctica constructivista, debe ser ponderado como una oportunidad, como un indicador del proceso y no un resultado sancionable y punible. Si damos categoría pedagógica al error, puede servirnos de contraseña de un modo de pensar y hacer diferenciado, dado que en este concepto confluyen toda una serie de consideraciones teóricas y actuaciones concretas a nivel áulico (De la Torre, 2004). Por lo que el error debe ser asumido como una condición que acompaña a todo proceso de mejora, como un elemento constructivo e innovador.

Desde esta visión, el error debe ser considerado como la presencia en el o la estudiante de un esquema cognitivo inadecuado y no solo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o un despiste; nos proporciona evidencias de lo que ocurre en el proceso de razonamiento del sujeto y las estrategias o procedimiento que está utilizando para resolver un problema. El error permite adentrarnos en los mecanismos cognitivos que utiliza el o la estudiante y obtener información sobre estos mecanismos, que el acierto no nos proporciona - no todos los errores tienen la misma índole - unos pueden ser de conceptos, otros de percepción del problema, otros de simple ejecución o lapsus, entre otros.

A su vez, el conocimiento de la naturaleza del error proporciona una guía para la práctica didáctica del/la docente y condiciona el método de enseñanza que deberá centrarse en metodologías activas, y orientarse principalmente a las estrategias cognitivas del/la estudiante, a su modo de procesar la información. Si se plantea el error como elemento concomitante al proceso de aprender, concienciaremos al o la estudiante para reflexionar sobre los errores y equivocaciones cometidos en la realización de la tarea o procedimiento. Para esto el/la docente debe apoyarlos a examinar las estrategias y comprobar su funcionamiento para cambiar de enfoque o estrategia de aprendizaje según se requiera.

Así, el análisis de los errores debería constituir un eje central en todo proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que le permite al/la docente identificar el manejo conceptual o de procedimientos en los que el/la estudiante presenta deficiencias, o alguna dificultad para lograr la comprensión en los aprendizajes en forma adecuada dentro de una disciplina. De este modo, el/la estudiante puede utilizar sus errores para conseguir un conocimiento más profundo sobre conceptos, modificar sus estrategias en la realización de la tarea y en la solución de problemas, y así optimizar la adquisición de los saberes.

Con todo, el trabajo de análisis de errores del área de matemática sobre la base de los resultados de las pruebas de caracterización 2020, ha permitido obtener información valiosa que favorece la gestión pedagógica para fortalecer los procesos de enseñanza aprendizaje. Así, por ejemplo, se evidenció que la competencia matemática presenta falencias observadas en el Eje de Números que repercuten en el Eje de Álgebra, por ello, reforzar de manera integral los elementos básicos de ambos ejes es fundamental para un avance progresivo.